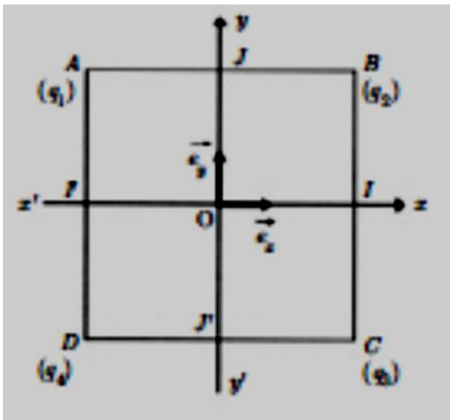
INPHB / TD D'ELECTROSTATIQUE / 2020-2021

Exercice 1

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté $a = 1\,m$, et de centre O, origine d'un repère orthonormé *Oxy* de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. On donne :



$q_1 = q = 10^{-8}\,C$

$q_2 = -2q$

$q_3 = 2q$

$q_4 = -q$

$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ S.I.

1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}$.

2) Exprimer le potentiel V créé en O par les quatre charges.

3) Exprimer le potentiel sur les parties des axes $x'x$ et $y'y$ intérieures au carré. Quelle est, en particulier, la valeur de V aux points d'intersection de ces axes avec les côtés du carré (I, I', J et J') ?

Exercice 2

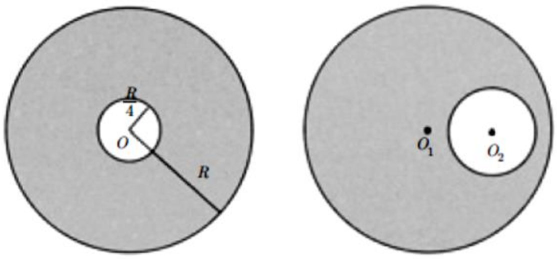
A. Parmi les distributions de charges suivantes, quelles sont celles pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique ? Exprimer alors ce champ en précisant sa direction et son sens :

1) fil de longueur _ de densité linéique de charge λ.
2) fil infini de densité linéique de charge λ.
3) circonférence de densité linéique de charge λ.
4) disque de densité surfacique de charge σ.
5) plan infini *(π)* de densité surfacique de charge σ.
6) sphère de rayon *R* chargée uniformément :
6.a) en surface avec une densité surfacique σ ;
6.b) en volume avec une densité volumique ρ.

Dans le cas de la sphère, donner l'allure des courbes *E(r)* et *V(r)* .

Exercice 3

On creuse dans une sphère de centre O_1 et de rayon *R* une cavité sphérique de même centre O_1 et de rayon $\frac{R}{4}$. Il n'y a pas de charge dans la cavité. Dans le volume sphérique restant, la densité volumique de charges est $\rho_0 = cte > 0$. En utilisant le principe de superposition, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel *V(r)* qui en résulte (en prenant $V(\infty) = 0$) dans les trois cas suivants :



B.1.a) $r \leq \frac{R}{4}$

B.1.b) $\frac{R}{4} \leq r \leq R$

B.1.c) $r \geq R$

Donner l'allure des courbes *E(r)* et *V(r)* .

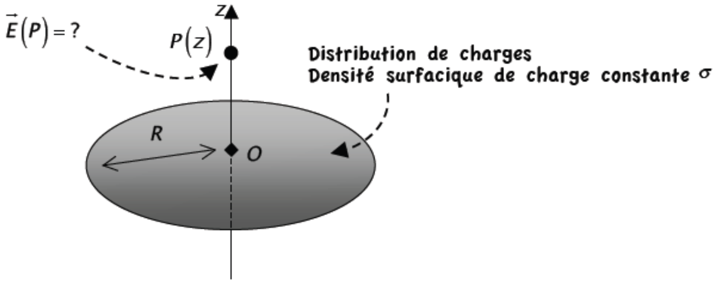
B.2) La cavité est centrée en O_2 tel que $O_1O_2 = \frac{R}{2}$. Exprimer :

B.2.a) le champ en un point *M* intérieur à la cavité en fonction de $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1M}$ et . $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2M}$. Que peut-on en conclure ?

B.2.b) Le champ en un point *N* extérieur à la sphère de rayon *R* en fonction de $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1M}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2M}$.

Exercice 4 : Calcul du champ à partir du potentiel

On utilise les coordonnées cartésiennes. Le potentiel électrostatique a pour expression $V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z)$.

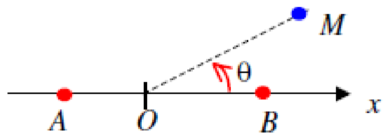


Déterminer les coordonnées du champ électrostatique créé en P par la distribution de charge.

Exprimer la composante radiale E_r du champ électrique en un point A, voisin de l'axe, à la distance r de l'axe, et d'abscisse z.

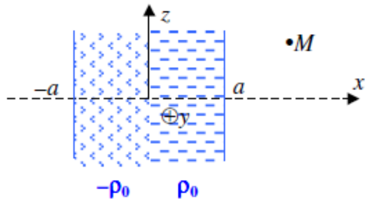
Exercice 5

I) On place une particule ponctuelle de charge q au point A d'abscisse $(-a)$ et une particule ponctuelle de charge $4q$ au point B d'abscisse b. Déterminer le rapport $\frac{a}{b}$ pour que le champ électrostatique $\vec{E}(O)$ soit nul en O. Quel est alors le potentiel $V(O)$ en O ?



II) Calculer en tout point de l'espace le potentiel créé par la distribution volumique de charges suivante: $\rho(x) = +\rho_0$ pour $0 < x \leq a$ et $\rho(x) = -\rho_0$ pour $-a < x < 0$.

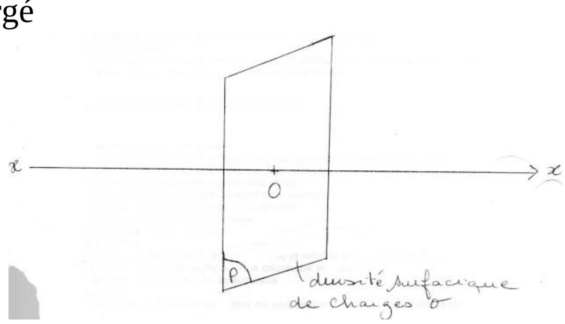
On posera le potentiel en $x = 0$ égal à V_0.



Exercice 6 :

1°) Champ et potentiel créés par un plan uniformément chargé

Soit un plan P infini portant une charge électrique uniformément répartie sur toute sa surface (densité surfacique de charge uniforme σ).

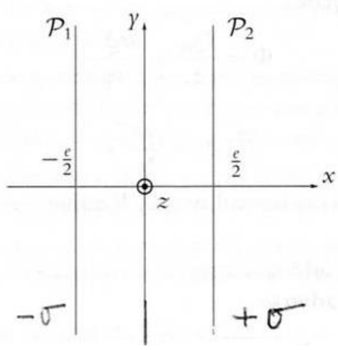


1.a) Le plan P peut-il être réellement infini ? Sinon, à quelle condition sur OM peut-on considérer que le plan P est infini ?

1.b) Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en M par le plan infini P en fonction de ε_0, σ et $\vec{u}_x$. En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$(M') créé en M' par le plan infini P en fonction de ε_0, σ et $\vec{u}_x$. Tracer la courbe représentant l'évolution de E_x la coordonnée sur l'axe (Ox) du champ électrostatique $\vec{E}$ en fonction de x.

1.c) Rappeler la relation liant le potentiel électrique V et le champ électrique $\vec{E}$. En déduire l'expression de V en fonction de ε_0, σ quand $x > 0$ et quand $x < 0$. On choisit arbitrairement un potentiel nul sur le plan $V(0) = 0$. En déduire une expression de V en fonction de ε_0, σ et $|x|$.

Tracer la courbe représentant l'évolution de V en fonction de x.



1.d) Le champ électrique varie-t-il de manière continue lors de la traversée du plan chargé. Même question pour le potentiel électrique.

2°) On ne tiendra pas compte des effets de bord ce qui revient à considérer que les armatures du condensateur plan sont des plans infinis et à négliger ce qui se passe sur les bords des plans. Dans ces conditions, un condensateur plan est assimilable à l'association de deux plans infinis uniformément chargés, l'un P_2 de densité surfacique de charge $+\sigma$ et l'autre P_1 de densité surfacique de charge $-\sigma$; ces deux plans sont séparés par une distance e.

2.a) Exprimer σ en fonction de Q la valeur absolue de la charge d'une armature et de S la surface d'une armature.

2.b) Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{E_1}$ créé par le plan P_1 en fonction de σ et ε_0 si $x \leq -\frac{e}{2}$ et si $x \geq -\frac{e}{2}$.

2.c) Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{E_2}$ créé par le plan P_2 en fonction de σ et ε_0 si $x \leq \frac{e}{2}$ et si $x \geq \frac{e}{2}$.

2.d) Sur la figure ci-dessus, représenter $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$ quand $x \leq -\frac{e}{2}$, $\frac{e}{2} \geq x \geq -\frac{e}{2}$ et $x \geq \frac{e}{2}$. En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par le condensateur plan en fonction de σ et ε_0 si $x \leq -\frac{e}{2}$, $\frac{e}{2} \geq x \geq -\frac{e}{2}$ et $x \geq \frac{e}{2}$. Tracer la courbe représentant l'évolution de E_x la coordonnée sur l'axe (Ox) du champ électrostatique $\vec{E}$ en fonction de x.

2.e) Exprimer le potentiel électrique V en fonction de x, σ, ε_0 et d'une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer si $\frac{e}{2} \geq x \geq -\frac{e}{2}$.

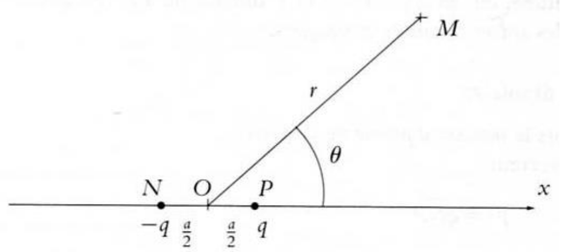
2.f) Exprimer la tension U entre les deux armatures du condensateur en fonction de σ, ε_0 et e puis en fonction de Q, S, e et ε_0.

2.g) En déduire une expression de la capacité C du condensateur en fonction de S, e et ε_0. Retrouver l'unité de ε_0.

Exercice 7 :

1°) Définition, potentiel et champ créés

On nomme dipôle électrostatique le système constitué de deux charges ponctuelles opposées $-q$ et $+q$ situées en deux points N et P distants de a et tels que $a = NP$ soit très petite devant les autres distances envisagées.



1.a) Exprimer $\vec{p}$ le moment dipolaire de la distribution en fonction de q et $\overrightarrow{NP}$. Quelle est l'unité de $p = \|\vec{p}\|$ dans le système international d'unité ? Quelle est l'unité couramment utilisée ?

Pour tenir compte de ces propriétés, on se place en coordonnées sphériques dans le plan méridien ou plan tel que φ = constante et on utilise les coordonnées polaires dans ce plan c'est-à-dire les deux autres coordonnées sphériques r et θ.

1.b) Exprimer V(M) le potentiel créé en M par le dipôle en fonction de ε_0, q, MN et MP.

1.c) Exprimer MP^2 en fonction de r, a et θ puis $\frac{1}{MP}$ en fonction de r, a et θ. On considère que $\frac{a}{r} \ll 1$, préciser l'argument de l'énoncé qui conduit à cette approximation. Simplifier l'expression de $\frac{1}{MP}$ en réalisant un développement limité de la relation précédente au premier ordre en $\frac{a}{r}$.

1.d) Exprimer MN^2 en fonction de r, a et θ puis $\frac{1}{MN}$ en fonction de r, a et θ. On considère que $\frac{a}{r} \ll 1$, simplifier l'expression de $\frac{1}{MN}$ en réalisant un développement limité de la relation précédente au premier ordre en $\frac{a}{r}$.

1.e) Montrer que le potentiel peut, dans le cadre des approximations réalisées aux questions précédentes, s'écrire sous la forme $V(M) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}.\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

1.f) Rappeler la relation liant le champ électrostatique $\vec{E}$(M) et le potentiel V(M) créés en M par la distribution de charges. Montrer que le champ électrostatique $\vec{E}$(M) peut s'écrire sous la forme $\vec{E}$(M) = $E_r(M).\overrightarrow{u_r} + E_\theta(M).\overrightarrow{u_\theta}$. Exprimer $E_r(M)$ et $E_\theta(M)$ en fonction de p, θ, r et ε_0.

1.g) Montrer que $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{3.(\vec{p}.\overrightarrow{OM}).\overrightarrow{OM} - OM^2.\vec{p}}{OM^5}$.

1.h) Les effets d'un dipôle se font ressentir à moins grande distance que ceux d'une charge unique. Pourquoi ?

1.i) Représenter les lignes de champ et les équipotentielles du dipôle électrostatique.

2°) Action d'un champ extérieur uniforme sur un dipôle

On s'intéresse à l'action subie par un dipôle plongé dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}$.

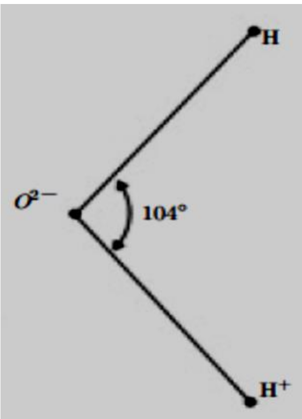
2.a) Quelle est la force exercée par ce champ électrostatique extérieur uniforme sur le dipôle électrostatique ?

2.b) Montrer que le moment exercé par le champ électrostatique extérieur uniforme s'écrit : $\vec{M}_{/O} = \vec{p} \wedge \vec{E}$. Ce moment dépend-t-il du point où on le calcule ? Si on note α l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{E}$, pour quelles valeurs de α, $\vec{M}_{/O}$ est-il nul ?

2.c) En appliquant le théorème du moment cinétique au dipôle électrostatique, déterminer les valeurs de α pour lesquelles le dipôle est à l'équilibre. Comparer la stabilité de ces deux positions. Quelle est l'action d'un champ électrostatique extérieur uniforme sur un dipôle.

2.d) Soient $V_{ext}(P)$ et $V_{ext}(N)$ les potentiels électrostatiques de P et N associés au champ extérieur $\vec{E}$, exprimer l'énergie potentielle du dipôle (ne pas confondre cette énergie avec l'énergie potentielle d'interaction entre les deux charges) dans le champ $\vec{E}$ en fonction de $V_{ext}(P)$ et $V_{ext}(N)$ et montrer que $E_p = -\vec{p}.\vec{E}$. Déterminer les positions d'équilibre du dipôle (utiliser l'angle α) et étudier la stabilité de ces positions.

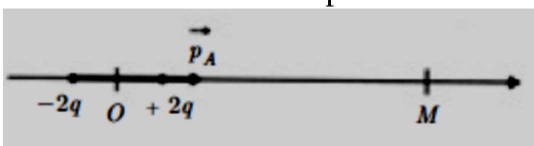
Exercice 8



A) En première approximation, une molécule d'eau peut être considérée comme formée de deux ions H^+ et un ion O^{2-} disposés comme l'indique la figure. Calculer le moment dipolaire $\vec{p}_A$ de cette molécule sachant que les distances entre O^{2-} et les deux ions H^+ sont toutes les deux égales à 1 Å.

B) On considère une molécule d'eau A, placée au point O. Elle est assimilable à un dipôle électrique permanent de moment $\vec{p}_A$ dont le centre est en O. En un point M, situé sur l'axe de la molécule A, à une distance *r*, on place successivement :

B.1) Une charge électrique $q > 0$. Quelle est la force exercée par la molécule A sur cette charge?



B.2) Un dipôle de moment $\vec{p}$ orienté selon $\overrightarrow{OM}$.

B.2.a) Quelle est l'énergie potentielle du dipôle $\vec{p}$ dans le champ électrique $\vec{E}_M$ créé en M par la molécule A ? (On supposera que *r* est suffisamment grand pour que le champ $\vec{E}_M$ puisse être considéré comme constant autour de M.)

B.2.b) Quelle est la force à laquelle est soumis le dipôle ? On précisera sa direction et son sens.

B.3) On considère un dipôle induit $\vec{p}$ dont l'intensité est proportionnelle à l'intensité du champ $\vec{E}_M$, soit $\vec{p} = \beta\vec{E}_M$ (on supposera toujours $\vec{E}_M$ constant autour de M).

B.3.a) Quelle est l'énergie potentielle d'interaction de ce dipôle avec la molécule d'eau ?

B.3.b) À quelle force est-il soumis ?

B.4) L'interaction dipôle-dipôle peut-elle suffire à expliquer la stabilité du système de deux molécules ? Justifier votre réponse.